

Matematica III

A.A. 2021/2022

CdL in Statistica, Economia, Finanza e Assicurazioni
Facoltà di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e

Statistica

Sapienza Università di Roma

Docente: dott. Giulio Galise

Diario delle lezioni

Avvertenza: gli argomenti in grassetto sono da intendersi “con dimostrazione”.

22/09/21. Introduzione al corso. Richiami sulla struttura vettoriale euclidea di \mathbb{R}^N . Prodotto scalare, norma, distanza. Intorni. Insiemi limitati, aperti e chiusi. Parte interna di un insieme.

24/09/21. Punti di accumulazione, derivato e chiusura di un insieme, punti di frontiera, punti isolati. Caratterizzazioni dei chiusi. Insiemi convessi e connessi, connessione per poligoni. Funzioni di più variabili: insieme di definizione, immagine, grafico. Funzioni limitate (inferiormente, superiormente), insiemi di livello. Esempi vari.

29/09/21. Limiti di funzioni di più variabili: limite finito, infinito (con punto di accumulazione in \mathbb{R}^N e all'infinito). Esempi. Unicità del limite ed algebra dei limiti (somma, prodotto, quoziente etc.). Limiti di funzioni composte. Uso delle coordinate polari.

01/10/21. Limiti di restrizioni, non esistenza del limite. Funzioni continue in \mathbb{R}^N , teoremi di Weierstrass e dei valori intermedi. Esempi vari e svolgimento esercizi.

06/10/21. Derivate parziali, vettore gradiente, definizioni, esempi e interpretazione geometrica. Funzioni derivabili non continue. Differenziabilità: definizione, esempi. **Differenziabilità implica continuità. Funzioni continue e derivabili ma non differenziabili.** Svolgimento esercizio sui limiti.

08/10/21. Piano tangente al grafico di una funzione differenziabile. **Teorema del differenziale (dimostrazione in dim = 2).** Esercizi su derivabilità e differenziabilità.

13/10/21. Derivate direzionali: definizione, interpretazione geometrica, **formula del gradiente** (derivata direzionale per funzioni differenziabili), esempi (in particolare **funzione derivabile lungo ogni direzione ma discontinua in un punto e per la quale non si applica la formula del gradiente**). **Interpretazione geometrica del vettore gradiente.** Derivate parziali del secondo ordine, matrice hessiana.

15/10/21. **Teorema di Schwarz (dimostrazione in dim = 2).** **Esempio di funzione con derivate seconde miste distinte.** Formula di Taylor del secondo ordine: introduzione. Esercizi su derivate direzionali e derivate di ordine superiore.

20/10/21. Formula di Taylor del secondo ordine con resto di Peano (dimostrazione in dim = 2). Massimi e minimi relativi, **condizioni necessarie del primo e del secondo ordine (dimostrazione in dim = 2).** Punti critici e punti di sella. Esempi.

22/10/21. Condizione sufficiente del secondo ordine (dimostrazione in dim = 2). Determinante hessiano. Svolgimento esercizi su classificazione punti stazionari e ottimizzazione libera.

27/10/21. Funzioni definite implicitamente: motivazione e interpretazione geometrica. Il Teorema del Dini (in 2 e 3 variabili, senza dimostrazione). Esempi vari. **Derivata seconda della funzione implicitamente definita da $f(x, y) = 0$ nell'ipotesi f di classe C^2 .**

29/10/21. Retta tangente ad una curva di equazione $f(x, y) = 0$ nei punti non singolari. Ortogonalità tra il gradiente e gli insiemi di livello. Ottimizzazione vincolata. **Metodo dei moltiplicatori di Lagrange (dimostrazione in dim = 2).** Esercizi vari.

03/11/21. Risoluzione esercizio (problema della scatola). Massimi e minimi assoluti: esempi con vincoli di disuguaglianza compatti e non compatti e con funzioni con punti di non derivabilità. Il metodo delle linee di livello.

05/11/21. Integrali doppi su rettangoli: somme integrali inferiori e superiori, disuguaglianze tra queste, definizione di integrabilità e di integrale doppio. Interpretazione geometrica. **Esempi di funzioni integrabili e non (funzioni costante e di Dirichlet).** Proprietà dell'integrale. Integrabilità funzioni continue, teorema di riduzione (o di Fubini). Esempi.

10/11/21. Definizione di integrabilità di funzioni limitate su generici domini limitati, proprietà ed interpretazione geometrica. Misura di Peano-Jordan. Insiemi di misura nulla. Esempi.

12/11/21. I grafici di funzioni continue su intervalli compatti hanno misura nulla (dimostrazione nel caso Lipschitz). Funzioni generalmente continue. Integrali doppi su domini normali, **formule di riduzione (dimostrazione).** Esercizi vari.

16/11/21. Cambiamento di variabili per gli integrali doppi. Esempi vari.

19/11/21. Integrali doppi impropri di funzioni non limitate su domini misurabili limitati e non limitati. Misura di insiemi illimitati. Esempi. **Calcolo dell'integrale gaussiano.** Esercizi integrali doppi con cambiamento di variabile.

24/11/21. Integrali tripli su parallelepipedi: somme integrali inferiori, superiori, disuguaglianze tra queste e definizione di integrabilità. Estensione al caso di domini limitati. Proprietà dell'integrale. Misura di Peano-Jordan. Calcolo degli integrali tripli: domini normali rispetto ai piani coordinati e formule di riduzione (integrazione per fili). Esempi vari.

26/11/2. Integrazione per strati. Cambiamento di variabili per gli integrali tripli. Coordinate sferiche e cilindriche. Esempi vari.

01/12/21. Esercizi di ricapitolazione.

03/12/21. Esercizi di ricapitolazione.

10/12/21. Esercizi di ricapitolazione.

Riferimenti bibliografici

- [1] G. Anichini, G. Conti, M. Spadini, *Analisi Matematica 2*, Pearson (2^a edizione)
- [2] P. Marcellini, C. Sbordone, *Esercitazioni di Analisi Matematica Due*, Zanichelli.